Pegel

Oft ergeben sich Fragestellungen wie „Wie groß ist die Ausgangsleistung P_a eines Verstärkers, wenn ihm die Eingangsleistung P_e zugeführt wird?“ oder „Um wie viel wird ein Signal abgeschwächt, wenn es über eine längere Leitung übertragen wird?“. Dies können wir im Fall des Verstärkers durch einen Verstärkungsfaktor V

$$V = \frac{P_a}{P_e}$$

oder im Fall der Leitung durch einen Dämpfungsfaktor D ausdrücken.

$$D = \frac{P_a}{P_e}$$

Ein einfaches Zahlenbeispiel: Auf den Eingang eines Verstärkers werden $10W$ gegeben, dieses wird auf $40W$ verstärkt (Abbildung 1). Die anschließende Leitung dämpft die Leistung auf $30W$, die dann an der Antenne anliegen.

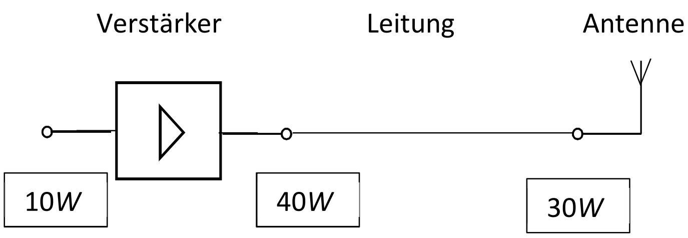

Abbildung 1: einfache Sendeanlage

Der Verstärkungsfaktor des Verstärkers ist

$$V = \frac{P_a}{P_e} = \frac{40W}{10W} = 4$$

Als Dämpfungsfaktor für die Leitung erhalten wir

$$D = \frac{P_a}{P_e} = \frac{30W}{40W} = 0{,}75$$

Mit diesen Ergebnissen lassen sich auch schnell an der Antenne anliegende Sendeleistungen berechnen, wenn andere Eingangsleistungen am Verstärker anliegen.

Nun gibt es ein sehr großes Leistungsspektrum, beispielsweise von der sehr kleinen Leistung, die ein Radio oder Fernsehgerät an der Antenne empfängt, bis hin zur Sendeleistung von Rundfunkstationen. Dementsprechend ergeben sich sehr große Verstärkungs- und Dämpfungsfaktoren. Um die Rechnung handhabbarer zu machen, aber auch, weil dann nur addiert statt multipliziert werden muss, wurde der Pegel (ein logarithmisches Maß) eingeführt.

Was ist der Logarithmus? Betrachten wir den Ausdruck

$$b^e = p$$

beispielsweise

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

so heißt $p = 1000$ die Potenz, $b = 10$ ist die Basis und $e = 3$ der Exponent. Sind die Potenz und der Exponent gegeben, so lässt sich die Formel nach b umstellen:

$$b = \sqrt[e]{p}$$

im Beispiel

$$10 = \sqrt[3]{1000}$$

Was aber ist, wenn Basis und Potenz gegeben sind? Hier kommt der Logarithmus ins Spiel:

$$e = log_e p$$

Gelesen als Logarithmus der Potenz *p* zur Basis *b*. Der Logarithmus bestimmt den Exponenten. Im Beispiel

$$3 = log_{10} 1000$$

Für den Logarithmus zur Basis 10 gibt es eine spezielle Bezeichnung, es ist der dekadische Logarithmus, abgekürzt *lg*.

$$3 = lg 1000$$

Dieser dekadische Logarithmus hat im Dezimalsystem eine besondere Bedeutung, er gibt die Anzahl der Nullen der Potenz an. So ist Tausend eine Eins mit drei Nullen.

Was passiert nun, wenn wir Potenzen mit gleicher Basis multiplizieren? Probieren wir es aus!

$$100 \cdot 1000 = 10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3} = 10^5 = 100000$$

oder allgemein

$$p_1 p_2 = b^{e_1} b^{e_2} = b^{e_1 + e_2}$$

Im Beispiel ist $b = 10, e_1 = 2, e_2 = 3, p_1 = 100$ und $p_2 = 1000$. Werden zwei Potenzen gleicher Basis miteinander multipliziert, so werden ihre Exponenten addiert.

$$log_b(p_1 p_2) = log_b p_1 + log_b p_2$$

im Beispiel

$$5 = lg 100000 = lg(100 \cdot 1000) = lg 100 + lg 1000 = 2 + 3$$

Genau das ist der Trick der Pegelrechnung, wie wir gleich sehen werden. Um das Problem der großen Leistungsspanne und damit unhandlich großer Zahlenunterschiede in den Griff zu bekommen, wird der Pegel *a* in *Bel* definiert:

$$a = lg \frac{P_a}{P_e}$$

Genauso wie ein Meter zehn Dezimetern entspricht, ist ein Bel das Gleiche wie zehn Dezibel. Diese Einheit hat sich für den Pegel eingebürgert, die Formel für den Pegel in Dezibel lautet also

$$a = 10 lg \frac{P_a}{P_e}$$

Für die Umkehrung gilt

$$P_a = P_e \cdot 10^{\frac{a}{10}}$$

Im eingangs genannten Beispiel ergibt sich als Verstärkungsmaß für den Verstärker

$$a_V = 10 lg \frac{40W}{10W} = 6dB$$

Die Leitung dämpft die Leistung auf 30*W* herab, damit ergibt sich hier ein Verstärkungsmaß von

$$a_L = 10 lg \frac{30W}{40W} = -1{,}2dB$$

Wir sprechen nicht von einem negativen Verstärkungs-, sondern von einem positiven Dämpfungsmaß. Insgesamt ergibt sich ein Pegel von

$$a = a_V + a_L = 6dB - 1{,}2dB = 4{,}8dB$$

also

$$P_{Antenne} = P_{Verstärkereingang} \cdot 10^{\frac{a}{10}} = 10W \cdot 10^{\frac{4,8}{10}} = 30W$$

Diese ganze Rechnerei erscheint wie mit Kanonen auf Spatzen geschossen, erweist sich jedoch als recht nützlich, wenn mehr als zwei Abstufungen wie im betrachteten Beispiel oder sehr große Leistungsunterschiede betrachtet werden.

Eine unvermeidliche, weil gebräuchliche Sprechweise ist „10*W* + 3*dB*". Sie ist mathematisch nicht zulässig, weil hier Äpfel und Birnen addiert werden (es können nur Zahlen mit gleichen Einheiten addiert werden). Was aber ist damit gemeint?

10*W* + 3*dB* bedeutet, dass – bezogen auf die 10*W* – eine Verstärkung um 3*dB* auftritt, also

$$10W \cdot 10^{\frac{3}{10}} = 10W \cdot 2 = 20W$$

3*dB* sind eine Verdopplung der Leistung, 6*dB* eine Vervierfachung usw. Umgekehrt sind -3*db* eine Leistungshalbierung, -6*dB* eine Viertelung usw. 10*dB* bedeuten eine Verzehnfachung der Leistung:

$$\frac{P_a}{P_e} = 10^{\frac{10}{10}} = 10^1 = 10$$

Es gibt verschiedene Pegel. Der bisher behandelte ist der Leistungspegel. Wenn nichts weiter gesagt ist,, ist immer dieser Leistungspegel gemeint. Daneben existiert auch noch der sogenannte Spannungspegel. Um ihn zu verstehen, gehen wir vom Spannungsabfall am ohmschen Widerstand aus.

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Bilden wir das Verhältnis zweier durch Spannungen ausgedrückte Leistungen, so kürzt sich der Widerstand *R* heraus.

$$\frac{P_a}{P_e} = \frac{\frac{U_a^2}{R}}{\frac{U_e^2}{R}} = \frac{U_a^2}{U_e^2} = \left(\frac{U_a}{U_e}\right)^2$$

Nun gibt es ein Logarithmengesetz, welches besagt, dass der Exponent einer Potenz als Faktor vor den Logarithmus geschrieben werden kann.

$$lg(b^e) = e \cdot lgb$$

Warum ist das so? Betrachten wir die Zahl 1000000.

$$\begin{aligned} 1000000 &= 10^6 \\ 6 &= lg10^6 \\ &= lg10^{2\cdot 3} \\ &= 2 \cdot lg10^3 \\ &= 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Angewendet auf den Pegel heißt das

$$a = 10lg\frac{P_a}{P_e} = 10lg\left(\frac{U_a}{U_e}\right)^2 = 20lg\frac{U_a}{U_e}$$

Dies ist der Spannungspegel, ausgedrückt in *dB*. Damit ist es möglich, den Pegel durch Spannungsverhältnisse auszudrücken.

Einer Vervierfachung der Leistung entspricht eine Verdopplung der Spannung, denn wenn sich die Spannung am ohmschen Widerstand verdoppelt, verdoppelt sich nach dem Ohmschen Gesetz auch der Strom. Das ist der physikalische Grund des Faktors 20 in der Formel des Spannungspegels. Zur Unterscheidung wird der Spannungspegel oft mit a_U bezeichnet.

$$a_U = 20lg\frac{U_a}{U_e}$$

Sinkt beispielsweise die Leistung durch Dämpfung eines Kabels auf ein Viertel

$$a = 10lg\frac{P_a}{P_e} = 10lg\frac{1}{4} = -6dB$$

so sinkt die Spannung um die Hälfte

$$a_U = 20lg\frac{U_a}{U_e} = 20lg\frac{1}{2} = -6dB$$

Die bisherigen Pegelangaben beziehen sich auf Verhältnisse. Wir können damit aus einer beliebigen Eingangsleistung oder -spannung die zugehörige Ausgangsleistung oder -spannung oder umgekehrt berechnen.

Außerdem gibt es noch absolute Pegel, die auf einen festen Eingangswert bezogen sind. So existieren für die Leistung beispielsweise Angaben in *dBW*

$$p = 10lg\frac{P_a}{1W}$$

in *dBm*

$$p = 10lg\frac{P_a}{1mW}$$

oder in *dBpW*

$$p = 10lg\frac{P_a}{1pW}$$

So entsprechen 2*dBm* der Leistung

$$1W \cdot 10^{\frac{2}{10}} = 1,58W$$

Und4*dBpW* der Leistung

$$1pW \cdot 10^{\frac{4}{10}} = 2,51pW$$

Für absolute Spannungspegel sind Angaben in Volt und Mikrovolt gebräuchlich. In *dBV*

$$p_U = 20lg\frac{U_a}{1V}$$

und in *dBµV*

$$p_U = 20lg\frac{U_a}{1\mu V}$$

$3dBV$ sind

$$1V \cdot 10^{\frac{3}{20}} = 1{,}41V$$

und $6dB\mu V$ sind

$$1\mu V \cdot 10^{\frac{6}{20}} = 2\mu V$$